複素数と方程式

例題 2　べき乗計算

ド・モアブルの定理（数Ⅲ「複素数平面」で学習）

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ （n は整数）

証明

まず，$0 \leq n$ の整数についてド・モアブルの定理が成り立つことを証明する。

（ⅰ）

$n = 0$ のとき

左辺 $= (\cos\theta + i\sin\theta)^0 = 1$，右辺 $= \cos 0 + i\sin 0 = 1$ より成立

（ⅱ）

$n = k$ のとき $(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos k\theta + i\sin k\theta$ が成り立つとすると，

$n = k + 1$ のとき

$$
\begin{aligned}
(\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} &= (\cos\theta + i\sin\theta)^k(\cos\theta + i\sin\theta) \\
&= (\cos k\theta + i\sin k\theta)(\cos\theta + i\sin\theta) \\
&= (\cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta) + i(\cos k\theta\sin\theta + \sin k\theta\cos\theta) \\
&= \cos(k\theta + \theta) + i\sin(k\theta + \theta) \\
&= \cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta
\end{aligned}
$$

より，$n = k + 1$ のときも成り立つ。

（ⅰ），（ⅱ）より，$0 \leq n$ の整数についてド・モアブルの定理が成り立つ。

続いて，$n < 0$ のときも成り立つことを証明する。

$n < 0$ のとき，$n = -m$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
(\cos\theta + i\sin\theta)^n &= (\cos\theta + i\sin\theta)^{-m} \\
&= \frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^m} \\
&= \frac{1}{\cos m\theta + i\sin m\theta} \quad (\because 0 < m) \\
&= \frac{1}{\cos m\theta + i\sin m\theta}\frac{\cos m\theta - i\sin m\theta}{\cos m\theta - i\sin m\theta} \\
&= \frac{\cos m\theta - i\sin m\theta}{\cos^2 m\theta + \sin^2 m\theta} \\
&= \cos m\theta - i\sin m\theta \\
&= \cos(-n\theta) - i\sin(-n\theta) \\
&= \cos n\theta + i\sin n\theta
\end{aligned}
$$

となり，$n < 0$ のときも成り立つ。

以上より，すべての整数についてド・モアブルの定理が成り立つ。

(2)

別解：ド・モアブルの定理を使った解法

$$1+\sqrt{3}i=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\begin{aligned}\therefore\left(1+\sqrt{3}i\right)^8&=2^8\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^8\\&=2^8\left(\cos\frac{8}{3}\pi+i\sin\frac{8}{3}\pi\right)\\&=256\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)\\&=256\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\&=-128+128\sqrt{3}i\end{aligned}$$

2　演習題

（ア）

別解：ド・モアブルの定理を使った解法

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2p}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2p}&=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{2p}+\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}p\right)^{2p}\\&=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{p}+\left(\cos\frac{7}{2}\pi+i\sin\frac{7}{2}\pi\right)^{p}\\&=i^p+(-i)^p\\&=\left\{1+(-1)^p\right\}i^p\end{aligned}$$

ここで，p は奇数だから，$1+(-1)^p=1+(-1)=0$

$$\therefore\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2p}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2p}=0$$

例題 4　因数分解と因数定理

(4)

解説補充

$5x^2-5x-4=5(x-\alpha)(x-\beta)$

$25x^4-40x^2-25x-4=5(x-\alpha)(x-\beta)P(x)$

4　演習題

（イ）

別解

$(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$，$\alpha^2+\alpha+1=0$ より，$\alpha^3-1=0$　$\therefore \alpha^3=1$

よって，

$$\begin{aligned}f(\alpha)&=a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d\\&=a+b(-\alpha-1)+c\alpha+d\\&=\alpha(-b+c)+a-b+d\end{aligned}$$

$f(\alpha)=\alpha$ だから，$\alpha(-b+c)+a-b+d=\alpha$　$\therefore \alpha(-b+c-1)+a-b+d=0$

これと α が虚数であることから，

$-b+c-1=0$　・・・①

$a-b+d=0$　・・・②

補足

$\alpha=p+qi$（$q\neq 0$）とおくと，

$\alpha(-b+c-1)+a-b+d=\{p(-b+c-1)+a-b+d\}+q(-b+c-1)i$

$\alpha(-b+c-1)+a-b+d=0$ より，

$\{p(-b+c-1)+a-b+d\}+q(-b+c-1)i=0$

よって，$p(-b+c-1)+a-b+d=0$ かつ $q(-b+c-1)=0$

これと $q\neq 0$ より，$-b+c-1=0$ かつ $a-b+d=0$

$f(-1)=1$ より，$-a+b-c+d=1$　・・・③

$f(1)=1$ より，$a+b+c+d=1$　・・・④

5　演習題

(3)

a は $x^3-2x^2+3x-2=0$ の解だから，$a^3-2a^2+3a-2=0$

また，$a^3-2a^2+3a-2=0$ より、$a^3=2a^2-3a+2$　$\therefore a^5=2a^4-3a^3+2a^2$

よって，

$$\begin{aligned} a^5=2a^4-3a^3+2a^2 &= (a^3-2a^2+3a-2)(2a+1)-2a^2+a+2 \\ &= -2a^2+a+2 \end{aligned}$$

同様にして，

$b^5=-2b^2+b+2$

$c^5=-2c^2+c+2$

ゆえに，

$$\begin{aligned} a^5+b^5+c^5 &= -2(a^2+b^2+c^2)+(a+b+c)+6 \\ &= -2\cdot(-2)+2+6 \\ &= 12 \end{aligned}$$

6　演習題

補足

$$\gamma=1+\sqrt{3}i \Leftrightarrow \gamma-1=\sqrt{3}i \Rightarrow (\gamma-1)^2=(\sqrt{3}i)^2 \Leftrightarrow \gamma^2-2\gamma+4=0$$

より，γ は $x^2-2x+4=0$ の解である。

ともできる。